

Beispiel: Dreieck im \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned}
 P &= A + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \\
 &= A + \beta(B - A) + \gamma(C - A) \\
 &= \underbrace{(1 - \beta - \gamma)}_{\alpha} A + \beta B + \gamma C \\
 &= \alpha A + \beta B + \gamma C
 \end{aligned}$$

mit $\alpha + \beta + \gamma = 1$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10 Baryzentrische Koordinaten 8

Häufige Aufgabe

- Bestimme die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes P bzgl. des Dreiecks A, B, C .
- Lösung 1:
 - $\beta(B - A) + \gamma(C - A) \stackrel{!}{=} P - A = q$
 - Löse das LGS

$$\begin{pmatrix} b_x & c_x \\ b_y & c_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \end{pmatrix}$$
 - Setze $\alpha = 1 - \beta - \gamma$

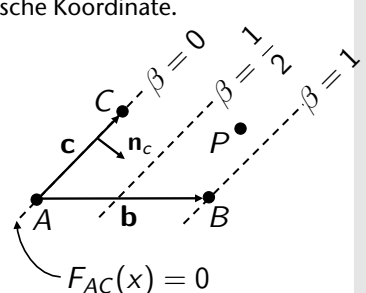
G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10 Baryzentrische Koordinaten 9

■ Lösung 2:

- Verwende Beobachtung: alle Punkte P mit dem selben Abstand von der Geraden \overline{AC} haben dieselbe baryzentrische Koordinate.
- Setze $n_c := \begin{pmatrix} c_y \\ -c_x \end{pmatrix}$

$$F_{AC}(P) := \frac{n_c \cdot (P - A)}{n_c \cdot (B - A)}$$

Normierung ↗



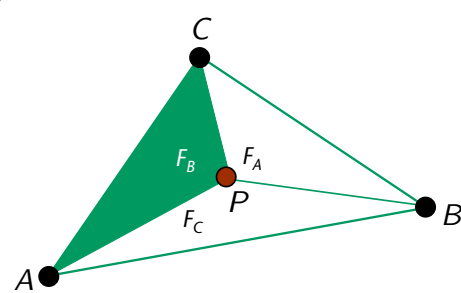
- Damit ist $F_{AC}(A) = F_{AC}(C) = 0$,
 $F_{AC}(B) = 1$ (wegen Normierung)
- Definiere analog F_{AB} und F_{BC}
- Damit ist $\alpha = F_{BC}(P)$, $\beta = F_{AC}(P)$, $\gamma = F_{AB}(P)$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10 Baryzentrische Koordinaten 10

■ Lösung 3:

- Nutze den geometrischen Zusammenhang zwischen Flächeninhalten und baryzentrische Koordinaten:

$$\alpha = \frac{F_A}{F} \quad \beta = \frac{F_B}{F} \quad \gamma = \frac{F_C}{F}$$

$$F = F_A + F_B + F_C$$


G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10 Baryzentrische Koordinaten 11

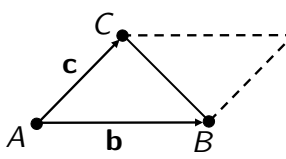
Erinnerung

- Flächeninhalt eines Dreiecks A, B, C

$$\mathcal{F}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \| \mathbf{b} \times \mathbf{c} \|$$

$$= \frac{1}{2} \| (B - A) \times (C - A) \|$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} B_x - A_x & C_x - A_x \\ B_y - A_y & C_y - A_y \end{vmatrix}$$

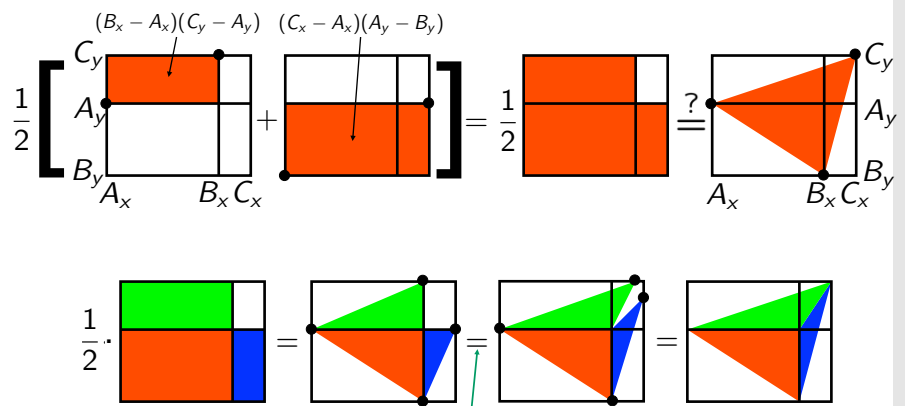
$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$


- Achtung: Achte auf den korrekten Umlaufsinn !!
- Beobachtung: Flächeninhalt = 0 \Leftrightarrow Det = 0 \Leftrightarrow Dreieck ist degeneriert \Leftrightarrow Punkte sind nicht affin unabhängig

G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10 Baryzentrische Koordinaten 12

Geometrischer Beweis der Flächenformel

- Zu zeigen:

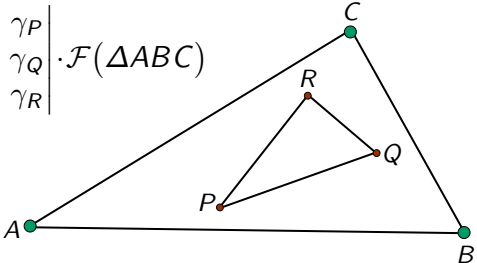
$$\mathcal{F}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} [(B_x - A_x)(C_y - A_y) - (C_x - A_x)(B_y - A_y)]$$


denn $F(\text{Dreieck}) = \frac{1}{2} \cdot \text{Basis} \cdot \text{Höhe}$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10 Baryzentrische Koordinaten 13

Beweis der Lösung 3

- Sei A, B, C ein Dreieck, darin ein Dreieck P, Q, R
- Die baryzentrischen Koordinaten von P, Q, R bzgl. A, B, C seien
 $P : (\alpha_P, \beta_P, \gamma_P)$ $Q : (\alpha_Q, \beta_Q, \gamma_Q)$ $R : (\alpha_R, \beta_R, \gamma_R)$
d.h.
 $P = \alpha_P A + \beta_P B + \gamma_P C$
- Wir beweisen den etwas allgemeineren Satz:

$$\mathcal{F}(\Delta PQR) = \begin{vmatrix} \alpha_P & \beta_P & \gamma_P \\ \alpha_Q & \beta_Q & \gamma_Q \\ \alpha_R & \beta_R & \gamma_R \end{vmatrix} \cdot \mathcal{F}(\Delta ABC)$$


G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10 Baryzentrische Koordinaten 14

- Zur Erinnerung: Determinanten sind linear, d.h.

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ s\mathbf{a} + t\mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = s \cdot \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + t \cdot \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

- Damit braucht man $\mathcal{F}(\Delta PQR)$ nur noch ausrechnen: (1)

$$2\mathcal{F}(\Delta PQR) = \begin{vmatrix} \alpha_P A_x + \beta_P B_x + \gamma_P C_x & \alpha_Q A_x + \beta_Q B_x + \gamma_Q C_x & \alpha_R A_x + \beta_R B_x + \gamma_R C_x \\ \alpha_P A_y + \beta_P B_y + \gamma_P C_y & \alpha_Q A_y + \beta_Q B_y + \gamma_Q C_y & \alpha_R A_y + \beta_R B_y + \gamma_R C_y \\ \underbrace{\alpha_P + \beta_P + \gamma_P}_1 & \alpha_Q + \beta_Q + \gamma_Q & \alpha_R + \beta_R + \gamma_R \end{vmatrix}$$

G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10 Baryzentrische Koordinaten 15

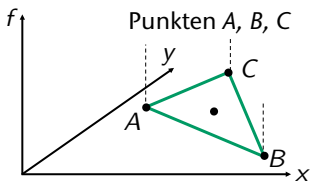
$$\begin{aligned}
&= \alpha_P \cdot \begin{vmatrix} A_x & \dots \text{s. eq. (1)} & \dots & \dots \\ A_y & & & \\ 1 & & & \end{vmatrix} + \beta_P \cdot \begin{vmatrix} B_x & \dots & \dots \\ B_y & & \\ 1 & & \end{vmatrix} + \gamma_P \cdot \begin{vmatrix} C_x & \dots & \dots \\ C_y & & \\ 1 & & \end{vmatrix} \\
&= \alpha_P \cdot \left(\underbrace{\alpha_Q \begin{vmatrix} A_x & A_x & \dots \\ A_y & A_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}}_0 + \beta_Q \begin{vmatrix} A_x & B_x & \dots \\ A_y & B_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \gamma_Q \begin{vmatrix} A_x & C_x & \dots \\ A_y & C_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} \right) \\
&+ \beta_P \cdot \left(\alpha_Q \begin{vmatrix} B_x & A_x & \dots \\ B_y & A_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \beta_Q \underbrace{\begin{vmatrix} B_x & B_x & \dots \\ B_y & B_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}}_0 + \gamma_Q \begin{vmatrix} B_x & C_x & \dots \\ B_y & C_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} \right) \\
&+ \gamma_P \cdot \left(\alpha_Q \begin{vmatrix} C_x & A_x & \dots \\ C_y & A_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \beta_Q \begin{vmatrix} C_x & B_x & \dots \\ C_y & B_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix} + \gamma_Q \underbrace{\begin{vmatrix} C_x & C_x & \dots \\ C_y & C_y & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{vmatrix}}_0 \right) \\
&= \dots
\end{aligned}$$

Erinnerung: lineare Interpolation

- Sei ein skalarer Wert f an P, Q vorgegeben: $f(P)=f_1, f(Q)=f_2$
- Dann kann man jedem Punkt X auf der Geraden \overline{PQ} einen Wert $f(X)$ zuordnen
- Sei t der Parameter von X , also $f(X) = (1-t) \cdot f(P) + t \cdot f(Q)$
- Dann setze $X = (1-t) \cdot P + t \cdot Q$

Anwendung: Baryzentrische Interpolation

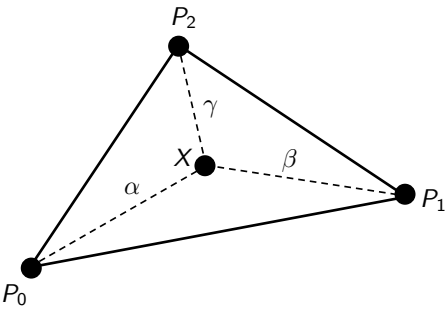
- Gegeben: „Höhen“ f_A, f_B, f_C an den (oder irgendwelche anderen Werte)
- Gesucht: Funktion f , so daß f_A, f_B, f_C interpoliert werden
- Idee: bestimme baryzentrische Koordinaten eines beliebigen Punktes X , interpoliere damit die Funktionswerte
- Sei $X = \alpha A + \beta B + \gamma C$
- Setze $f(X) = \alpha f_A + \beta f_B + \gamma f_C$
- Funktioniert auch für X außerhalb $\triangle ABC$
- Funktioniert auch für $f_A, f_B, f_C \in \mathbb{R}^m$
- Auf den Kanten entspricht dies gerade einer linearen Interpolation



G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10 Baryzentrische Koordinaten 18

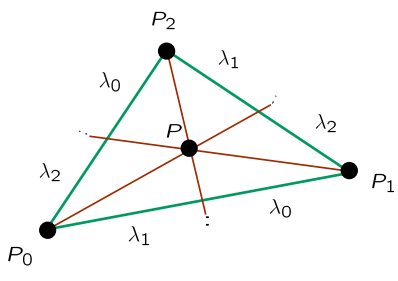
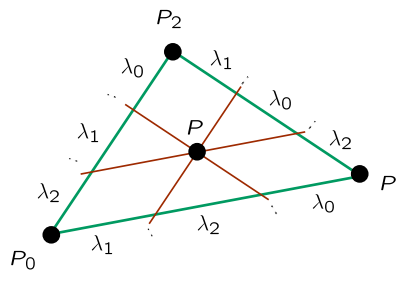
Weitere Anwendung: Punkt-in-Dreieck-Test

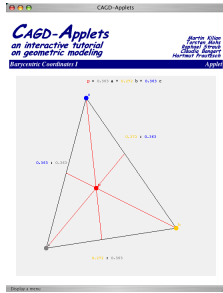
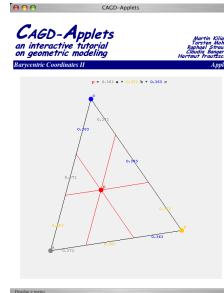
- Der Punkt X ist im Inneren des Dreiecks $\Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma > 0$



G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10 Baryzentrische Koordinaten 19

Geometrische Verhältnisse im Dreieck

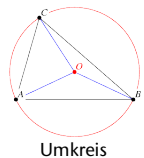
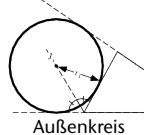
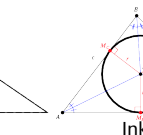
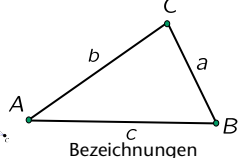
<http://i33www.ibds.uni-karlsruhe.de/applets/>

G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10
Baryzentrische Koordinaten 20

Spezielle Punkte im Dreieck

- Viele spezielle Punkte im Dreieck lassen sich mittels baryzentrischer Koordinaten sehr leicht angeben / ausrechnen (o. Bew.):

Punkt	α	β	γ
Schwerpkt.	1	1	1
Außenkreis zu A	$-a$	b	c
Inkreis	a	b	c
Umkreis	$a^2(b^2 + c^2 - a^2)$	$b^2(c^2 + a^2 - b^2)$	$c^2(a^2 + b^2 - c^2)$

- Achtung: die Koordinaten sind ohne Normierung angegeben (sog. "homogene baryzentrische Koord.") — die muß man also vor eine tatsächlichen Berechnung noch durchführen

G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10
Baryzentrische Koordinaten 21



This slide features a large white rectangular area for content, framed by a thin black border. In the top-left corner, there is a small green square icon with a white symbol. In the top-right corner, there is a small vertical grey bar with a white icon. At the bottom, a white footer bar contains the text "G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10" on the left and "Baryzentrische Koordinaten 22" on the right.



This slide is identical in layout to slide 22, featuring a large white content area, a green icon in the top-left, a grey bar with an icon in the top-right, and a footer bar with the text "G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10" and "Baryzentrische Koordinaten 23".



G. Zachmann Computer-Graphik 1 - WS 09/10 Baryzentrische Koordinaten 24